ARTÍCULO ORIGINAL
10.23670/RC.2026.01.05

VALIDACIÓN TEÓRICA DE LA ESTABILIDAD EN SISTEMAS DE RECIRCULACIÓN MEDIANTE PULSOS

STUDY OF STABILILITY IN DNAMIC SYSTEMS WITH RECIRCULATIÓN: VALIDATIÓN BY PULSES

Guido Herlan España Barrios[1]
[1]IMBOLMED SRL
***Correspondencia:** cipreces@gmail.com https://orcid.org/0000-0003-2637-6260

RESUMEN

Este estudio teórico evalúa la robustez de la estabilidad en un sistema dinámico de dos tanques interconectados mediante modelado matemático y simulación numérica. Se integran herramientas computacionales como Matlab, Python y Mathematica para analizar la respuesta del sistema ante perturbaciones exógenas tipo pulso (lineales y parabólicas) aplicadas en el punto de equilibrio. Los resultados demuestran la estabilidad global asintótica del sistema, cuantificada mediante un exponente de Lyapunov de -0.312, lo que confirma la convergencia de las trayectorias y la disipación de energía. Adicionalmente, la simulación evidenció que la forma del pulso impacta significativamente en la dinámica transitoria de las concentraciones. Se concluye que la metodología propuesta permite validar teóricamente la robustez del sistema y definir envolventes operativas seguras frente a perturbaciones finitas.

Palabras clave: Sistemas dinámicos; Estabilidad de Lyapunov; Perturbaciones; Simulación numérica; Tanques interconectados: EDOs (ecuaciones diferenciales ordinarias); valores propios.

ABSTRACT

This theoretical study evaluates the robustness of stability in a dynamic system of two interconnected tanks using mathematical modeling and numerical simulation. Computational tools such as Matlab, Python, and Mathematica were integrated to analyze the system response to exogenous pulse-type disturbances (linear and parabolic) applied at the equilibrium point. The results demonstrate the global asymptotic stability of the system, quantified by a Lyapunov exponent of -0.312, confirming

the convergence of trajectories and energy dissipation. Additionally, the simulation showed that the pulse shape significantly impacts the transient dynamics of concentrations. It is concluded that the proposed methodology allows for the theoretical validation of system robustness and the definition of safe operating envelopes against finite disturbances.

Keywords: Dynamic systems; Lyapunov stability; Disturbances; Numerical simulation; Interconnected tanks; ODEs: (ordinary differential equations); Eigenvalues

Recepción: 10/10/2025 **Aceptación:** 18/02/2026

INTRODUCCIÓN

Los sistemas dinámicos interconectados, como los procesos de tanques con recirculación, son fundamentales en la ingeniería química y ambiental, donde el control de concentraciones y flujos es crítico para garantizar la eficiencia y seguridad operativa (Khalil, 2002). La teoría de estabilidad de Lyapunov proporciona un marco matemático robusto para determinar la estabilidad asintótica en torno a un punto de equilibrio; sin embargo, existe una brecha en el conocimiento respecto al comportamiento de estos sistemas cuando se enfrentan a perturbaciones finitas de duración controlada, como los pulsos de entrada.

Comprender la respuesta ante perturbaciones de forma definida (lineal y parabólica) es crucial para validar la robustez del diseño más allá de la linealización local. Estudios recientes sugieren que la forma del pulso afecta significativamente las métricas de desempeño transitorio (Zhang & Wang, 2022; Kim & Lee, 2023).

El presente trabajo tiene como objetivo desarrollar y validar una metodología teórica para evaluar la robustez de un sistema de dos tanques interconectados mediante la aplicación de pulsos lineales y parabólicos. Se utiliza un enfoque basado en simulación numérica, integrando herramientas computacionales como Matlab, Python y Mathematica para verificar la convergencia al equilibrio mediante funciones de Lyapunov y análisis de sensibilidad.

METODOLOGÍA

El sistema de estudio consiste en dos tanques interconectados en serie con recirculación. Asumiendo volúmenes constantes y mezcla perfecta, el balance de masa se describe mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs):

Modelo Matemático

El sistema bajo estudio consiste en dos tanques interconectados en serie con recirculación. Una corriente de salmuera ingresa al Tanque 1 con un caudal constante $Q_0 = 1$ L/min y una concentración de sal $C_0 = 1$ kg/L. Como condición inicial, el Tanque 1 contiene una masa inicial de 25 kg de sal disuelta en un volumen de 20 L, mientras que el Tanque 2 contiene inicialmente 20 L de agua pura.

La mezcla, asumiendo homogeneización perfecta, fluye del Tanque 1 hacia el Tanque 2 con un caudal $Q_1 = 1$ L/min. Existe una línea de recirculación que retorna mezcla del Tanque 2 al Tanque 1 con un caudal $Q_3 = 1$ L/min. Finalmente, la mezcla abandona el sistema desde el Tanque 2 con un caudal de salida Q_2 =L/min.

Bajo estas condiciones de operación y aplicando el principio de conservación de masa, el comportamiento dinámico del sistema se representa mediante las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:"

$$\frac{dX_1}{dt} = -\frac{2}{20}X_1 + \frac{1}{20} * X_2 + 1 * 1 \quad (1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = \frac{2}{20} * X_1 - \frac{1}{20} * X_2 - \frac{1}{20} * X_2 \quad (2)$$

Matricialmente:

$$\dot{X}_i = AX_i + b$$

$$\dot{X}_i = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix} * X_i + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Condiciones iniciales: $X_1(0) = 25$ kg y $X_2(0) = 0$

Los puntos de equilibrio se calculan igualando a cero las ecuaciones (1) y (2)

$$0 = -0.1 * X_1 + 0.05 * X_2 + 1$$

$$0 = 0.1*(X_1 - X_2)$$

Resolviendo el sistema, se determina los puntos de equilibrio: $Xc_1 = 20$, $Xc_2 = 20$.

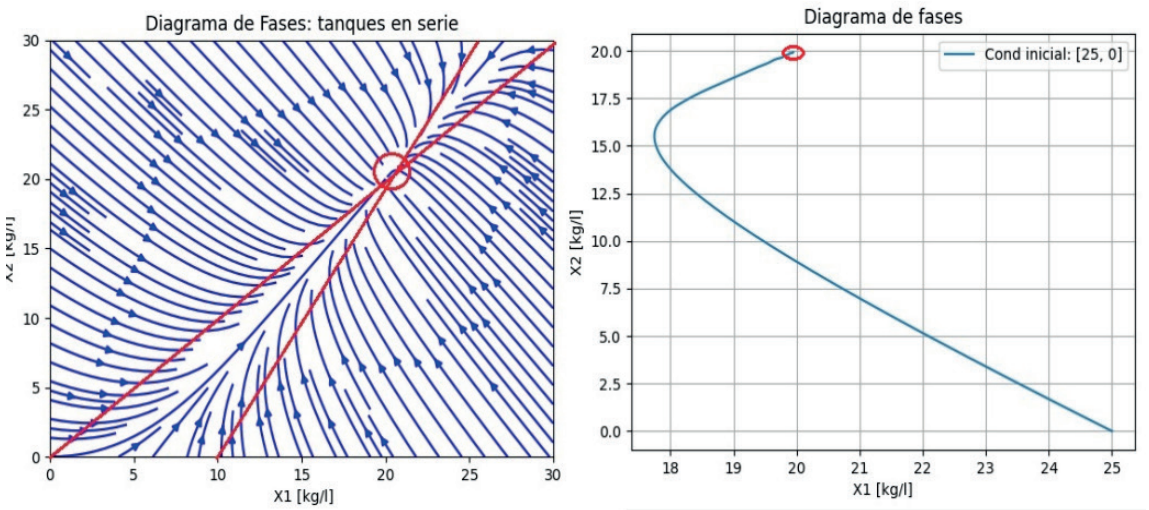


Figura 1. Diagrama de fases y punto de equilibrio sistema de tanques

La Figura 1 presenta el diagrama de fases del sistema dinámico, mostrando la trayectoria temporal $\phi(t; \mathbf{X}_0)$ (curva azul) en el espacio de estados definido por las concentraciones X_1 y X_2. El punto rojo identifica el punto de equilibrio asintóticamente estable $X^*=[20.0,20.0]^T$ kg/L, hacia el cual converge la trayectoria con comportamiento monótono.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{bmatrix} -0.1 - \lambda & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Después de las operaciones algebraicas:

$$\lambda^2 + 0.2 * \lambda + 0.005 = 0 \qquad (3)$$

Solución del polinomio: $\lambda_2 = -0.02928$ y $\lambda_1 = -0.1707$

Los valores propios calculados son negativos; por tanto, el sistema es estable y el punto de equilibrio es un atractor.

Los valores propios negativos $\lambda_1 < 0$, indican que las trayectorias convergen hacia el punto de equilibrio a medida que el tiempo tiende al infinito. Este comportamiento confirma que el sistema es estable, presentando estabilidad asintótica en su punto de reposo.

Desde una perspectiva matemática, estos valores representan dos modos dinámicos característicos (Khalil, 2002):

Modo rápido (λ_1=–0.1707): Domina la convergencia inicial, con una constante de tiempo $\tau_1 = 1/|\lambda_1| \approx 5.86$ min, siendo el responsable de la rápida disminución de X_1.

Modo lento (λ_2=–0.02928): Rige la aproximación final al equilibrio, con una constante de tiempo $\tau_2 = 1/|\lambda_2| \approx 34.13$ min, lo que explica el incremento gradual observado en

Para determinar las trayectorias del sistema en el plano de fases, se emplea el método de las isóclinas. Este método se obtiene dividiendo la ecuación (2) entre la ecuación (1):

$$\frac{dX_2}{dX_1} = \frac{0.1 * (X_1 - X_2)}{-0.1 * X_1 + 0.05 * X_2 + 1} = M \qquad (4)$$

La **Ecuación 4** representa analíticamente el campo vectorial F(**X**) que gobierna la dinámica del sistema. Este formalismo permite la **construcción geométrica** de trayectorias (Figura 2) y

la **identificación visual** del punto de equilibrio mediante intersección de isóclinas críticas sin necesidad de resolución algebraica. La **orientación convergente** de isóclinas alrededor de X^* evidencia **estabilidad local asintótica**, validada cuantitativamente por autovalores negativos (λ_1=-0.1707, λ_2=-0.0293). Esta metodología geométrica proporciona un complemento intuitivo a los análisis analíticos tradicionales, facilitando la comprensión cualitativa de la dinámica del sistema.

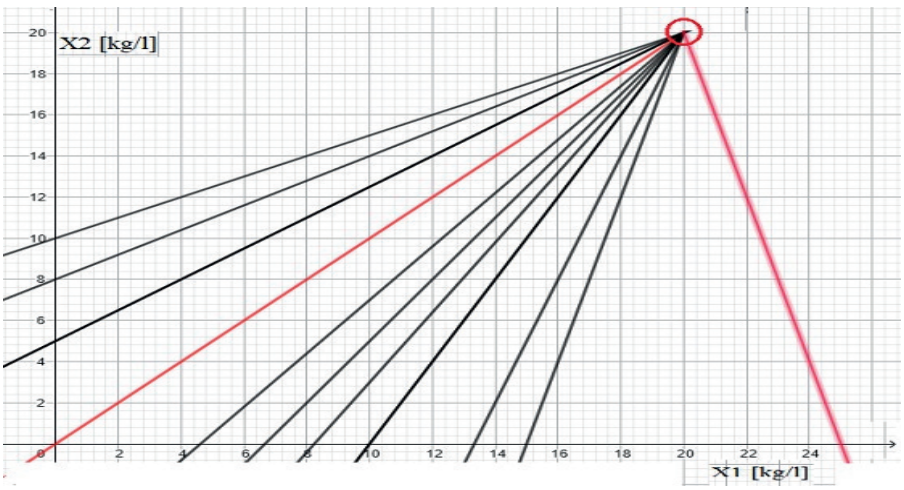


Figura 2. Trayectoria de las isoclinas

La Figura 2 codifica visualmente el campo vectorial $F(X_1,X_2)$ que define la dinámica del sistema, mostrando dirección y magnitud relativa del "flujo" en cada punto del espacio de fases. Las líneas rojas representan las isóclinas nulas (f_1=0 y f_2=0), cuya intersección identifica el punto de equilibrio.

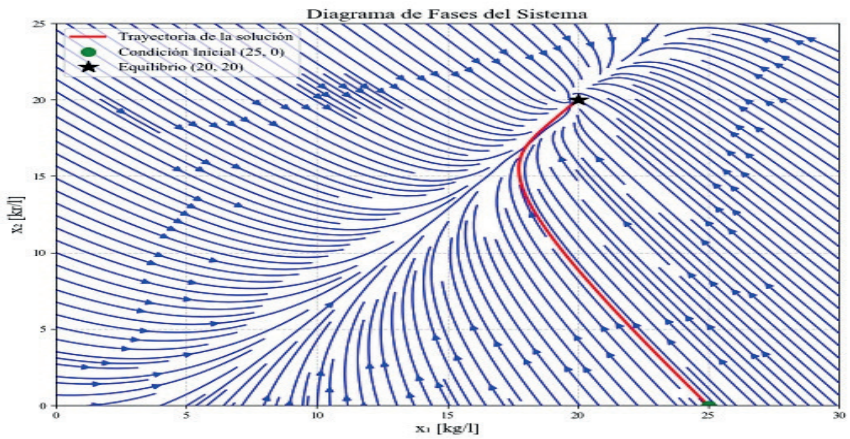


Figura 3. Punto de convergencia del sistema dinámico

Como ilustra la Figura 3, todas las trayectorias convergen asintóticamente al equilibrio cuando $t\to\infty$.El sistema exhibe estabilidad global asintótica: para cualquier condición inicial $X_0 \in R^2$, la solución $\phi(t;X_0)$ satisface:

$$\lim_{t\to\infty} \phi\,(t; X_0) = X^*$$

Esta propiedad se demuestra analíticamente mediante los autovalores negativos λ_1= -0.1707 y λ_2= -0.0293 de la matriz Jacobiana. El diagrama de fases muestra.

específicamente la evolución desde la condición inicial (25,0) kg/L hasta el equilibrio (20,20) kg/L, validando visualmente la estabilidad y convergencia del sistema.

Solución de las ecuaciones (1) y (2) con las condiciones iniciales indicadas:

$$X_1 = e^{\frac{t*(\sqrt{2}-2)}{20}} * \left(\frac{5}{2} - 5*\sqrt{2}\right) + e^{-\frac{t*(\sqrt{2}+2)}{20}} * \left(\frac{5}{2} + 5*\sqrt{2}\right) + 20 \qquad (5)$$

$$X_2 = \sqrt{2} * \left(e^{\frac{t*(\sqrt{2}-2)}{20}} * \left(\frac{5}{2} - 5*\sqrt{2}\right) - e^{-\frac{t*(\sqrt{2}+2)}{20}} * \left(\frac{5}{2} + 5*\sqrt{2}\right)\right) + 20 \qquad (6)$$

La solución es una función decreciente del tipo $X(t)_i = a_i * e_i^{-\lambda 1 t} + b_i * e_i^{-\lambda 2 t} + kc_i$ que tiende al punto de equilibrio cuando $t\to\infty$.

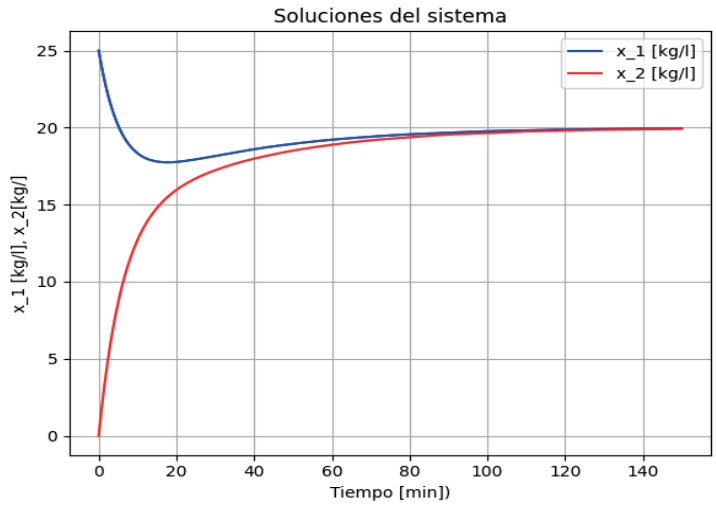


Figura 4. Solución sistema de ecuaciones (5) y (6)

La Figura 4, construida mediante integración numérica de las ecuaciones (5) y (6), ilustra la evolución temporal de las concentraciones X_1 y X_2.Se observa que X_1 disminuye progresivamente durante los primeros 15 minutos debido a la **transferencia de masa** hacia X_2 y al **efecto de dilución**

por alimentación externa. La **diferencia** $\Delta X=| X_1-X_2 |$ se reduce exponencialmente con constante de tiempo $\tau \approx 34.1$ min, reflejando la homogenización progresiva mediada por la **recirculación** entre tanques. El sistema alcanza el **equilibrio dinámico** en $t \approx 150$ min, momento en que ambas variables presentan concentraciones iguales ($X_1=X_2$) y las tasas de cambio se anulan ($dX_1/dt=dX_2/dt=0$). Este comportamiento valida el modelo matemático y confirma la **estabilidad asintótica** del sistema.

Función Candidata de Lyapunov

Para verificar la estabilidad asintótica, se propone una función candidata de Lyapunov basada en la energía del error respecto al punto de equilibrio (20,20).

$$V(X) = \frac{1}{2} * [(X_1 - 20)\text{^}2 - 0.1(X_2 - 20)\text{^}2]$$

Calculando la derivada temporal de esta función a lo largo de las trayectorias del sistema, se obtiene:

$$\frac{dV(X)}{dt} = (X_1 - 20) * \{-0.1 * X_1 + 0.05 * X_2 + 1\} + 0.1 * (X_2 - 20) * \{X_1 - X_2\} \qquad (7)$$

Al realizar las operaciones algebraicas y simplificar, la expresión se reduce a:

$$\dot{V}(X) = \frac{dV(X)}{dt} = -0.1 * (X_1 - 20)^2 - 0.1 * (X_2 - 20)^2 \qquad (8)$$

Análisis de estabilidad:

- **V(X) es positiva definida**: $V(X) > 0$ para todo X (20,20) y V (20,20) =0
- **es negativa definida:** Ambos términos de la ecuación (8) son negativos para cualquier valor de X_1, X_2 y distinto al equilibrio.

Por tanto, se concluye que el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

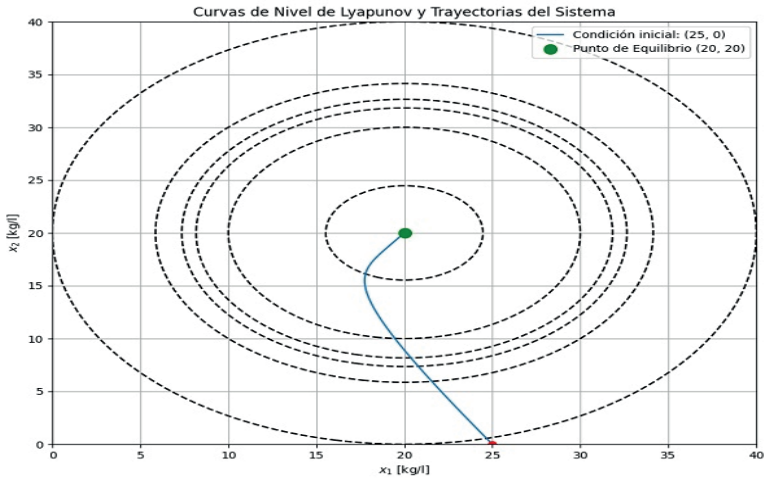


Figura 5. Niveles de energía del modelo

La Figura 5 muestra los niveles de energía (contornos) de la función de Lyapunov e ilustra la trayectoria del sistema en el espacio de fases, la cual describe una espiral convergente hacia el equilibrio. Este comportamiento geométrico confirma la presencia de amortiguación o disipación de energía, dado que el sistema evoluciona atravesando niveles de energía decrecientes ($V < 0$), en concordancia con la teoría de sistemas dinámicos amortiguados.

Exponente de Lyapunov

El exponente de Lyapunov es una medida fundamental en la teoría de sistemas dinámicos para cuantificar la sensibilidad a las condiciones iniciales. Según Lorenz (1963), este exponente mide la tasa de separación entre dos trayectorias que inician muy próximas en el espacio de fases. Un valor positivo del exponente indica comportamiento caótico (divergencia de trayectorias), mientras que un valor negativo indica estabilidad y convergencia hacia el equilibrio.

Matemáticamente, para un sistema descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales, el exponente de Lyapunov (β) se define como el límite de la tasa promedio de crecimiento exponencial de la separación entre dos trayectorias infinitesimalmente cercanas:

$$\beta = \lim_{t\to\infty} \lim_{\|\delta x_0\|\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x(t)\|}\right)$$

Donde:

- $\delta \mathbf{x}_0$ es un vector de pequeña perturbación inicial.
- $\delta \mathbf{x}_{(t)}$ es la perturbación después de un tiempo

- ‖ . ‖ denota la norma euclidiana.

La interpretación del signo del exponente es la siguiente:

- β>0: El sistema es caótico o inestable. Las trayectorias cercanas divergen exponencialmente.
- β = 0: El sistema es marginalmente estable (comportamiento periódico o cuasi -periódico).
- β < 0: El sistema es estable. Las trayectorias convergen entre sí hacia un atractor

Procedimiento de Cálculo del Exponente de Lyapunov

El cálculo de la divergencia entre trayectorias implica resolver el sistema de ecuaciones diferenciales para una trayectoria de referencia $\phi(t, X_0)$ y una trayectoria perturbada $\phi(t, X_{pert})$, donde la condición inicial perturbada se define como:

$$X_{pert}(0) = [X_1(0) + \epsilon, X_2(0)]$$

La divergencia se define como la norma euclidiana entre ambas trayectorias en cada instante t:

$$div(t) = \sqrt{\phi(t, Xpert)^2 - \phi(t, X0)^2}$$

Ajuste lineal: Se graficó el logaritmo natural de la divergencia, ln(div(t)) , en función del tiempo. Se realizó una regresión lineal sobre estos datos; la pendiente de la recta ajustada corresponde al exponente de Lyapunov. Para el presente estudio, se asumió una perturbación inicial ϵ=0.1

El valor calculado para el exponente de Lyapunov fue de -0.312, lo cual confirma la estabilidad del sistema y la convergencia exponencial de las trayectorias.

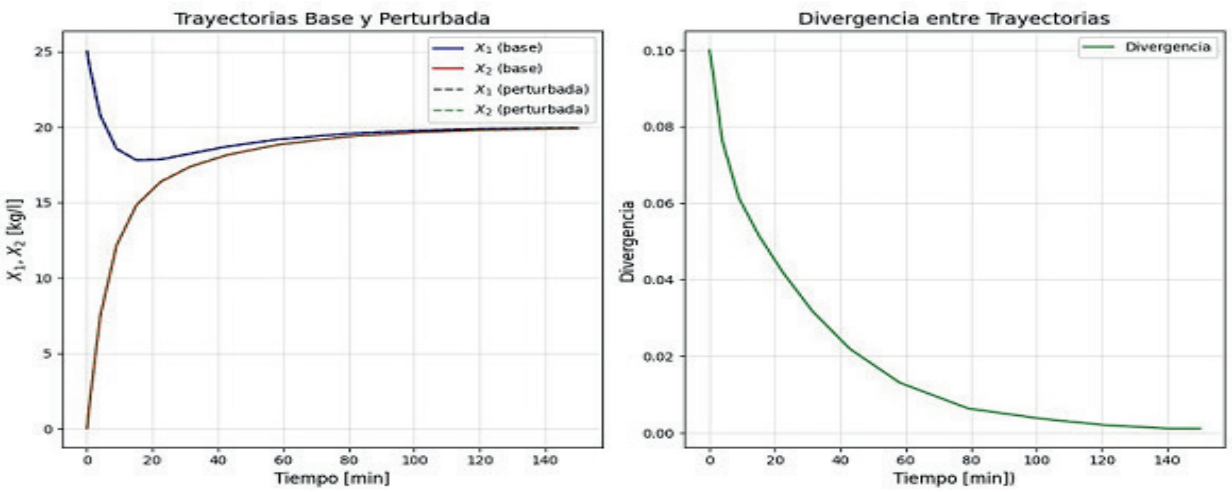


Figura 6. Exponente de Lyapunov

Un exponente de Lyapunov negativo (–0.312) indica que las trayectorias cercanas al punto de equilibrio convergen con el tiempo (figura 6), con una tasa exponencial de $e^{-0.312t}$. Las perturbaciones iniciales no se amplifican, se amortiguan y el sistema retorna al equilibrio siendo este predecible en el largo plazo, confirmando que, el sistema; es global y asintóticamente estable.

Pulsos aplicados al sistema de tanques

Una vez confirmada la estabilidad del sistema, se procede a simular perturbaciones mediante la aplicación de pulsos lineales y parabólicos. El objetivo es analizar su impacto verificando si el sistema es capaz de recuperar su estado original al retornar a las condiciones iniciales. Estas perturbaciones se aplicarán cuando el sistema haya alcanzado el punto de equilibrio, tomando los valores de concentración de dicho instante como condiciones iniciales. La perturbación se introducirá únicamente en la primera ecuación diferencial, dado que es la que ejerce mayor influencia sobre el sistema en su conjunto

Pulso lineal

Este pulso se generará al introducir 10 kg/l de sal en un minuto después de que el sistema haya llegado a los valores de estabilidad. Aplicando la ecuación de una recta se tiene:
Datos: C= 10 kg/l C_0= 1 kg /l, t_1= 1 min, t_0 = 0 min Q_0=1 lt/min

$$(C - C_0) * Q_0 = \frac{(C_1 - C_0) * Q_0}{t_1 - t_0}(t - t_1)$$

$$C - 10 = \frac{10 - 1}{1 - 0} * (t - 1)$$

$$C = 9 * t + 1 \qquad (9)$$

El nuevo sistema

$$\frac{dX_1}{dt} = -0.1 * X_1 + 0.05 * X_2 + 2 + 9 * t \qquad (10)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = 0.1 * X_1 - 0.1 * X_2 \qquad (11)$$

Para $0 < t \leq 1$ min, y condiciones iniciales: $X_1(0) = 20$ kg. $X_2(0) = 20$

La Figura 7 muestra que al cabo de un minuto las concentraciones son X1 =25.35 kg/L y X2 = 20.14 kg/l. Luego del pulso, el sistema vuelve a la normalidad. Tomando estas magnitudes como condiciones iniciales, se obtiene la siguiente solución particular para las ecuaciones (1) y (2):"

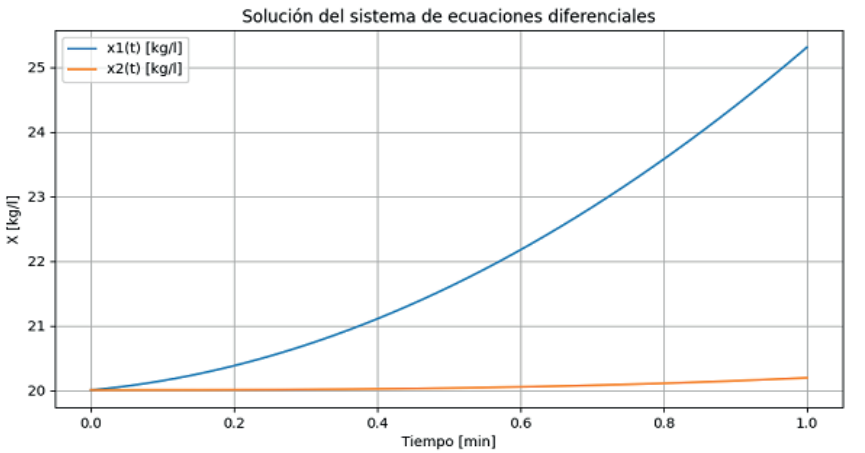


Figura 7. Solución sistema de ecuaciones (11) y (12)

La Figura 8 muestra el comportamiento del sistema durante su retorno al punto de equilibrio tras la aplicación del pulso. Transcurridos 150 minutos, el sistema recupera su estabilidad; esto es un aspecto crucial para analizar la variación de las diferentes variables y su influencia mutua. Sin esta estabilidad, un cambio abrupto podría llevar al sistema a un estado indeterminado, impidiendo el análisis de su comportamiento y la interrelación entre las variables.

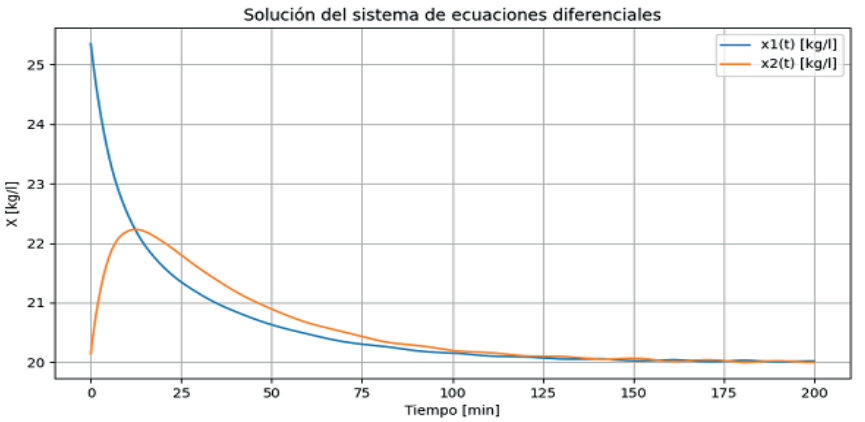


Figura 8. Solución sistema de ecuaciones diferenciales (1) y (2). post pulso

Variación de la concentración en todo el tramo: antes, durante y después del pulso (Figura 9). El retorno del sistema a las condiciones de equilibrio evidenciando la estabilidad asintótica del sistema.

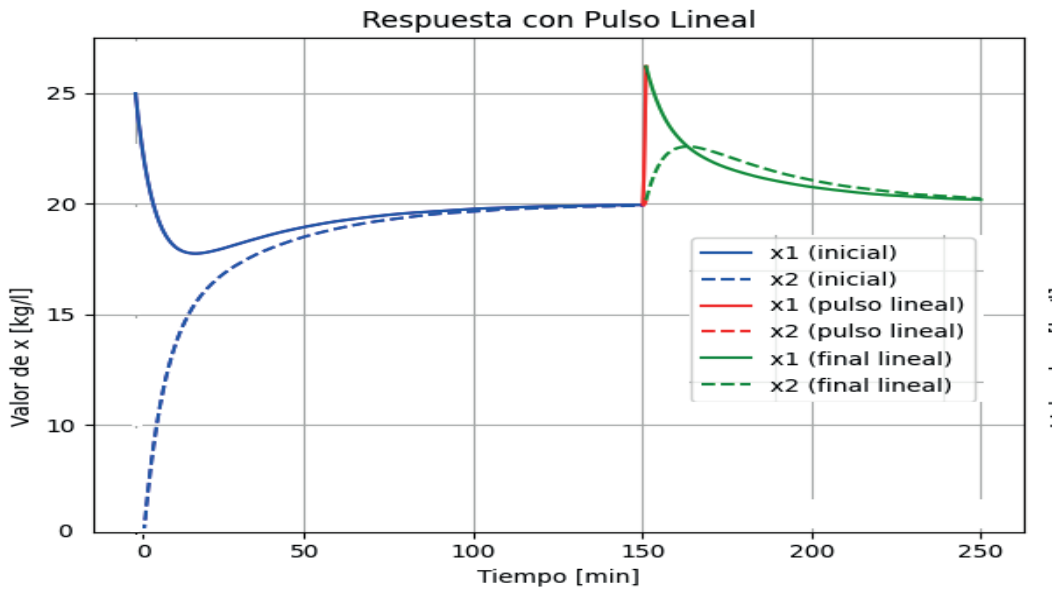


Figura 9. pulso lineal completo

Pulso Parabólico

Se analiza el comportamiento del sistema cuando el pulso sigue una función parabólica. Bajo las mismas condiciones iniciales que para el pulso lineal, el valor de p se calcula mediante la siguiente expresión

$$[(\mathrm{t} - t_0)]^2 = 4 * \mathrm{p} * (\mathrm{C} - \mathrm{C}_0) * Q_0$$

$$C = 9 * t^2 + 1 \qquad (12)$$

El nuevo EDOs.

$$\frac{dX_1}{dt} = -0.1 * X_1 + 0.05 * X_2 + 9 * t^2 + 2 \qquad (13)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = 0.1 * X_1 - 0.1 * X_2 \qquad (14)$$

Para $0 < \mathrm{t} \leq 1$ min y condiciones iniciales: $\mathrm{X}_1(0) = 20$ kg, $\mathrm{X}_2(0) = 20$ kg.

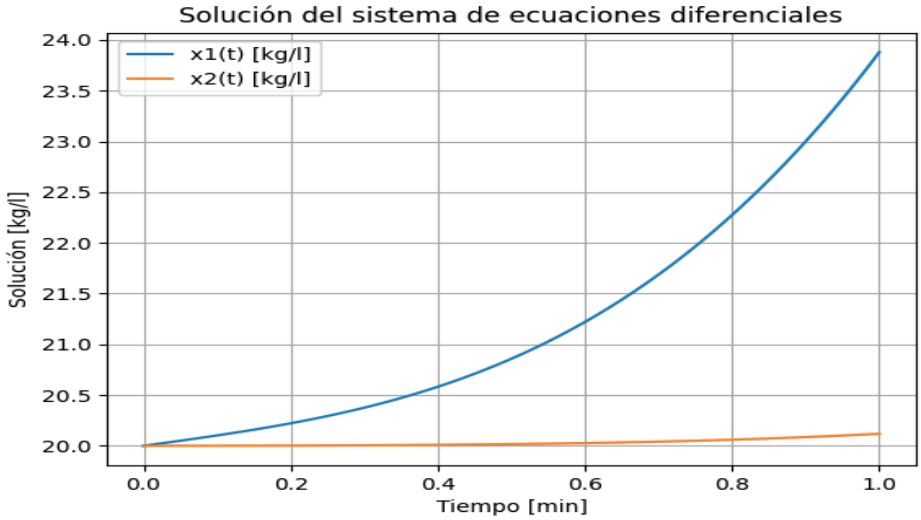


Figura 10. Solución sistema ecuaciones diferenciales (13) y (14)

La respuesta del sistema ante un pulso parabólico se muestra en la figura 10. Se observa que la variable X_1 experimenta un crecimiento notable, alcanzando los 23.8 kg, mientras que la variación de X_2 es mínima, situándose en 20.2 kg. Tras la aplicación del pulso, el sistema retorna al equilibrio dinámica que es descrita nuevamente por las ecuaciones (1) y (2), tomando como condiciones iniciales para esta fase: $X_1(0) = 23.8$ kg/L y $X_2(0) = 20.2$ kg/L

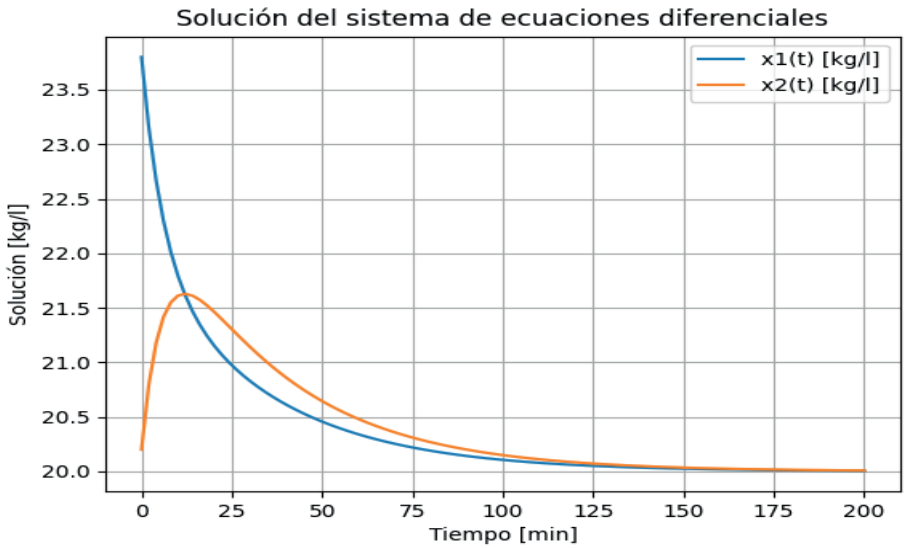


Figura 11. Solución S.E.D.O. post pulso parabólico

El valor máximo de X_2 (Figura 11) alcanza 21.6 kg/L a los 15 minutos post-pulso (t = 165 min en tiempo global) bajo un pulso parabólico, comparado con 22.1 kg/L para un pulso lineal. Este retardo temporal refleja el tiempo necesario para la transferencia convectiva de masa del Tanque 1

al Tanque 2, determinado por las constantes de tiempo del sistema $(\tau_1 = 5.86\,\text{min}, \tau_2 = 34.13\,\text{min})$. El incremento en X_2 se explica causalmente por un pico elevado en X_1. La menor magnitud del pico con pulso parabólico (2.26% menor que con lineal) sugiere una menor energía total inyectada o una distribución temporal más favorable. Ambos experimentos demuestran sobre picos moderados (8.0% parabólico,10.5% lineal) y recuperación completa al equilibrio, validando la estabilidad asintótica robusta del sistema y la validez predictiva del modelo matemático frente a perturbaciones estructuradas.

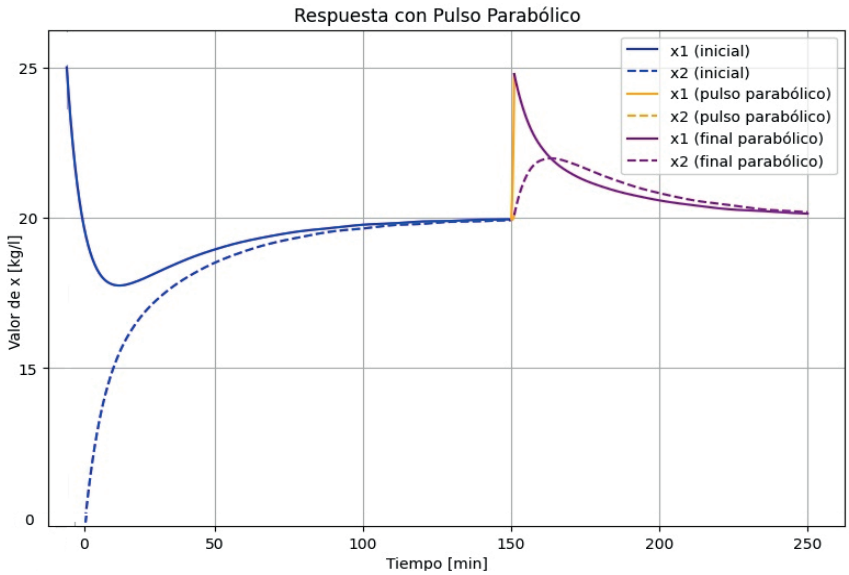


Figura 12. Pulso parabólico completo

La aplicación de un pulso parabólico en el minuto 150 (Figura 12) genera una desviación controlada del sistema desde su equilibrio, seguida de un retorno asintótico a las condiciones de equilibrio originales una vez finalizado el pulso. Este comportamiento demuestra estabilidad asintótica robusta: el sistema no solo permanece acotado ante perturbaciones, sino que converge exponencialmente al equilibrio tras la remoción de la perturbación. La respuesta transitoria observada valida el modelo matemático y confirma que el equilibrio $X^*=(20,20)^T$ es un atractor global para el sistema, con constantes de tiempo de recuperación determinadas por los autovalores $\lambda_1 = -0.1707\ \text{min}^{-1}$ (modo rápido) y $\lambda_2 = -0.0293\ \text{min}^{-1}$ (modo lento).

RESULTADOS

El sistema presentó un punto de equilibrio en $(X_1, X_2) = (20, 20)$ kg. Los valores propios calculados fueron: $\lambda 1 = -0.02928$ y $\lambda 2 = -0.1707$,, ambos con parte real negativa, lo que confirma teóricamente la estabilidad asintótica del nodo.

La simulación post - perturbación mostró que el sistema retorna al equilibrio en ambos casos. La Tabla 1 resume los picos máximos de concentración alcanzados. Se observó que el pulso lineal generó un sobre-pico en X_2 de 22.1 kg/L, mientras que el pulso parabólico alcanzó un máximo de 21.6 kg/L.

El cálculo del exponente de Lyapunov arrojó un valor de -0.312, confirmando que las trayectorias convergen exponencialmente y el sistema disipa la energía de la perturbación. Las trayectorias en el espacio de fases (Figuras 1-4) demostraron una espiral convergente hacia el punto de equilibrio tras la aplicación de los pulsos.

DISCUSIÓN

Los resultados validan la hipótesis de que el sistema mantiene su estabilidad global ante perturbaciones finitas de diferentes morfologías. El exponente de Lyapunov negativo corrobora la capacidad de recuperación del sistema, independientemente de la forma del pulso aplicado.

Sin embargo, se evidenciaron diferencias en la dinámica transitoria. Aunque el pulso lineal produjo un pico mayor en el segundo tanque, el pulso parabólico demostró un perfil de acumulación más suave durante el primer minuto. Esto sugiere que, para procesos donde la sobre - presión o concentración máxima es un factor limitante crítico, la caracterización de la forma del pulso es tan relevante como la magnitud total de la perturbación.

La integración de herramientas como Python y Mathematica permitió no solo simular el comportamiento, sino verificar analíticamente la positividad de la función de Lyapunov, cerrando la brecha entre la simulación numérica y la demostración teórica rigurosa.

En esta sección se presenta la evolución temporal de las concentraciones de las sustancias X_1 y X_2 bajo dos tipos de pulsos aplicados: lineal y parabólico. Los datos obtenidos se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1. Comparación de la respuesta dinámica tras la perturbación

Pulso / Variable	Valor Pico (kg/L)	Tiempo al Pico (min)	Estado Estacionario Final (kg/L)
Pulso Lineal (X_1)	25.35	1.0	20.0
Pulso Lineal (X_2)	22.10	1.0	20.0
Pulso Parabólico (X_1)	23.80	1.0	20.0
Pulso Parabólico (X_2)	21.60	1.0	20.0

Los resultados de la tabla 1 muestran que, bajo un pulso lineal, las concentraciones de ambos compuestos aumentan de forma constante y gradual, lo que sugiere una tasa de acumulación estable y controlada. En contraste, el pulso parabólico genera un incremento mucho más acelerado y pronunciado en las concentraciones, a partir de los 5 minutos. Este comportamiento puede atribuirse a la naturaleza del pulso aplicado, donde la modalidad parabólica intensifica la dosificación o la influencia del factor que afecta la concentración, favoreciendo un crecimiento exponencial en la acumulación de las sustancias. Por lo tanto, la selección del tipo de pulso y tiempo de duración del pulso, resulta crucial en el diseño y control de sistemas donde, la cinética de acumulación impacta directamente en la eficiencia o seguridad del proceso.

En futuros trabajos, será conveniente analizar cómo estas diferencias en la dinámica de concentración, afectan otras variables del sistema y explorar, estrategias para optimizar la dosificación según los objetivos específicos del proceso.

CONCLUSIONES

Validación Teórica: La metodología propuesta, basada en funciones de Lyapunov y simulación numérica, demostró ser eficaz para validar la estabilidad global asintótica del sistema de tanques ante perturbaciones finitas, sin necesidad de ensayos experimentales físicos.

Impacto de la Perturbación: El exponente de Lyapunov calculado (-0.312) confirma que el sistema disipa la energía de la perturbación y regresa al equilibrio, garantizando la robustez del diseño.

Dinámica del Pulso: Se evidenció que la forma del pulso modifica significativamente la respuesta transitoria; el pulso lineal generó un sobre-pico superior en X2 (22.1 kg/L) en comparación con el pulso parabólico (21.6 kg/L), lo cual es crítico para definir límites de seguridad operativa.

Herramientas de Simulación: La integración sinérgica de Matlab, Python y Mathematica permitió una caracterización precisa del espacio de estados y la verificación de criterios de estabilidad no lineales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chen, C.-T. (1998*). Linear system theory and design*. Oxford University Press.

Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems* (3rd ed.). Prentice Hall.

Kim J. (2023). Dynamic System Stability Verification Using Numerical Simulator. Mathematics Cornell University. Nov 19. 1-7

Kim, J., & Lee, S. (2005). Stability criteria for impulsive control systems with parabolic and linear impulses. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 3645(2), 645-654:

https://doi.org/10.1007/11538356_67

Kiseliov, A. I., Krasnov, M. L., & Makarenko, G. I. (1979). *Problemas de ecuaciones diferenciales* (3ra ed.). Editorial Mir.

Lazar, M., & Jokic, A. (2021). Relaxed Lyapunov conditions for discrete-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(10), 4928–4935. https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3057493

López, C. R., Villacreses, W., & Plaza, D. (2008). Control de nivel de dos tanques en serie. *Revista de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación*, 5(2), 6–12.

López, F., Sánchez, T., & Moreno, J. A. (2014). Construcción de funciones de Lyapunov para sistemas homogéneos de segundo orden. *Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático*, 14–17.

Mohammadi, M., Yazdanpanah, M. J., & Darvishi, M. T. (2022). Dynamic analysis and control of a recirculating tank system using nonlinear state-space modeling. *Chemical Engineering Communications,* 209(7), 979–993.

https://doi.org/10.1080/00986445.2022.2032106

Mulet, Y. G., Lemus, N. M., & Lemus, E. M. (2016). Metodología para el análisis de estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales N-Dimensionales. *Revista Cubana de Informática Médica,* 8(3), 515–525.

Rocca, R., & Alimonti, G. (2023). Validation of mathematical models: A unified framework for engineering and science. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 29(1), 12–34. https://doi.org/10.1080/13873954.2023.2164547

Tarantola, A. (2021). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation* (2nd ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9780898717921

Universidad de Chile. (2017, 3 de febrero). Criterio de estabilidad por el método directo de Liapunov [Archivo PDF]. http://www.dim.uchile.cl/~fbravo/guias/EDO/liapunov.pdf

Wang, L., & Liu, H. (2021). Recent advances in Lyapunov functions for hybrid impulsive systems with nonlinear impulses. *Systems & Control Letters*.